

Scuola Superiore di Catania
CONCORSO DI AMMISSIONE AI CORSI ORDINARI
ANNO ACCADEMICO 2002-2003

Prima prova scritta: Matematica e Logica

Corsi di laurea in Matematica, Fisica, Ingegneria, Informatica e Chimica

Il candidato risolva quanti più può dei seguenti esercizi

- 1) Dimostrare che, per ogni n intero, $n^2 + 5$ non è divisibile per 13.
- 2) Si consideri il polinomio di grado n

$$p_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$$

Mostrare che per ogni n pari il polinomio è sempre positivo, qualunque sia x reale.

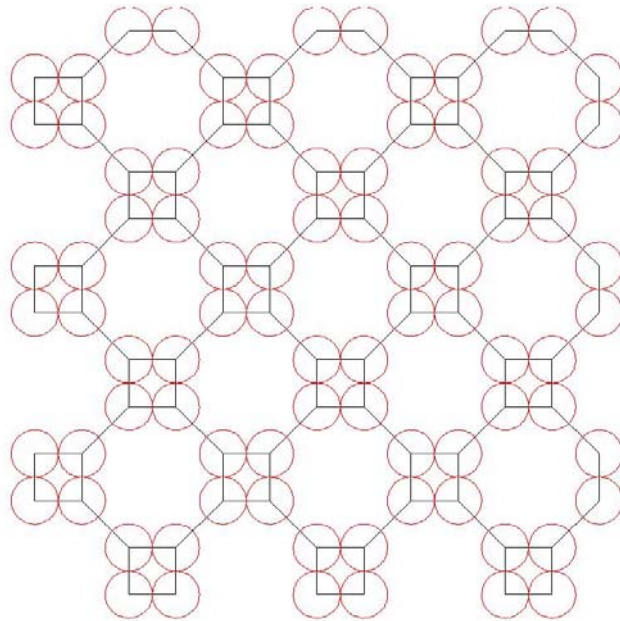
- 3) Data la funzione $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = [x+1]^n$, dove $[x]$ denota la parte intera di x ($[x] = \max\{y \in \mathbb{N}, y \leq x\}$) ed n è un intero positivo, si mostri che

$$S_{nm} \equiv \sum_{k=1}^m k^n = \int_0^m f_n(x) dx$$

Utilizzando tale rappresentazione, si determini una approssimazione per eccesso ed una per difetto di S_{nm} .

- 4) Si consideri una tassellatura del piano formata da quadrati e ottagoni, come riportata in figura. I quadrati sono di lato L e gli ottagoni hanno lati inclinati di lunghezza D . Su questa tassellatura si inserisce un insieme di cerchi non sovrapposti, di raggio massimo, centrati nei vertici della tassellatura. Calcolare la frazione di superficie del piano coperta dai cerchi. Determinare il rapporto L/D per il quale tale frazione è massima.

[Data la periodicità della tassellatura, è sufficiente considerare solo una cella del piano, la cui ripetizione periodica forma la tassellatura].



5) Un signore ha due cappelli, uno bianco ed uno giallo. Ogni giorno indossa al più uno solo dei cappelli. Per decidere se e quale indossare segue queste regole:

- i) Se il giorno prima ha indossato il cappello giallo allora non indossa alcun cappello
- ii) Se il giorno prima non ha indossato alcun cappello allora indossa il cappello bianco
- iii) Se il giorno prima ha indossato il cappello bianco, allora lancia una moneta ed indossa il cappello bianco o quello giallo a seconda che esca testa o croce.

Si determini:

1. quale è la probabilità che il quarto giorno indossi il cappello giallo sapendo che il primo giorno ha indossato il cappello bianco
2. quale è la probabilità che non indossi alcun cappello dopo un tempo molto lungo.

[Posto B_k , G_k , N_k , rispettivamente la probabilità che il giorno k si indossi il cappello bianco, giallo o nessun cappello, si vuole determinare G_4 e $\lim_{k \rightarrow \infty} N_k$].

6) Ci sono dodici palline apparentemente uguali. Una di esse, tuttavia, ha un peso diverso dalle altre, che hanno tutte peso standard. Si dispone di una bilancia a braccia uguali.

- a) Determinare, con tre sole pesate, quale è la pallina di peso diverso e dire se essa ha un peso maggiore o minore di quello standard.
- b) Risolvere l'analogo problema, questa volta con tredici palline (di cui una con peso diverso da quello standard), sapendo che si dispone di una cesta separata contenente palline di peso standard.
- c) Nel caso in cui le palline fossero quattordici, è sempre possibile determinare la pallina di peso diverso con tre pesate?

[Una bilancia a braccia uguali ha due piatti, in ciascuno dei quali si può disporre un certo numero di palline, e fornisce tre possibili risultati della pesata: l'ago della bilancia pende a sinistra, o a destra oppure rimane al centro. Si consiglia di numerare le palline.]

7) Mario gioca a dadi con Giorgio, secondo le seguenti regole.

Mario usa due dadi, ed il suo punteggio è la somma dei risultati del lancio dei due dadi. Giorgio ne usa tre, ed il suo punteggio è la somma dei due risultati più alti del lancio dei tre dadi.

Mario vince se il punteggio da lui ottenuto è maggiore o uguale al punteggio ottenuto da Giorgio.

Quale è la probabilità che Mario vinca?

[Si supponga per semplicità che i dadi siano dei tetraedri regolari, e che quindi il lancio di un dado fornisca un numero intero da 1 a 4 con uguale probabilità].