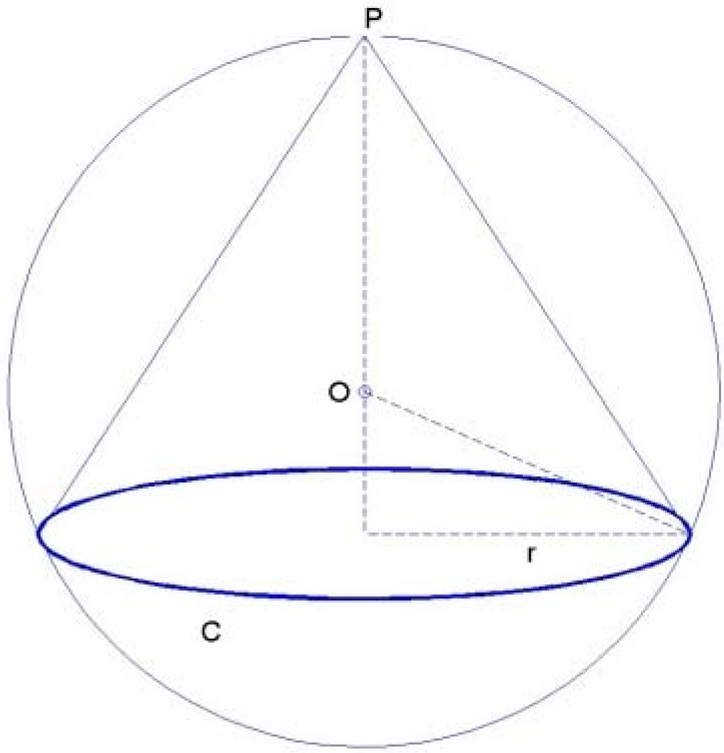
Soluzione Prima Prova Scritta di Matematica e Logica
per l'Ammissione al Primo Anno per Tutti i Corsi di Laurea esclusi quelli di Matematica, Fisica, Ingegneria, Informatica e Chimica

1)



Per ogni cerchio *C*, il cono di massimo valore è quello che ha il vertice *P* posto il più lontano possibile da *C*, pertanto *P* è il vertice di un cono circolare retto, la cui sezione è rappresentata in figura.

È ovvio che il cono di volume massimo avrà $h > 1$. La relazione fra *r* ed *h* si determina mediante il teorema di Pitagora:

$$(h-1)^2 + r^2 = 1.$$

Pertanto

$$r^2 = 1-(h-1)^2 = 1-h^2+2h-1 = 2h-h^2.$$

Il volume del cono è dunque

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}h(2h-h^2) = \frac{\pi}{3}(2h^2-h^3).$$

Il massimo di $V(h)$ si ottiene annullando la derivata:

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(4h - 3h^2).$$

$V'(h) = 0$ per $h = 0$ e $h = \frac{3}{4}$. Per $h = 0$ il valore è 0.

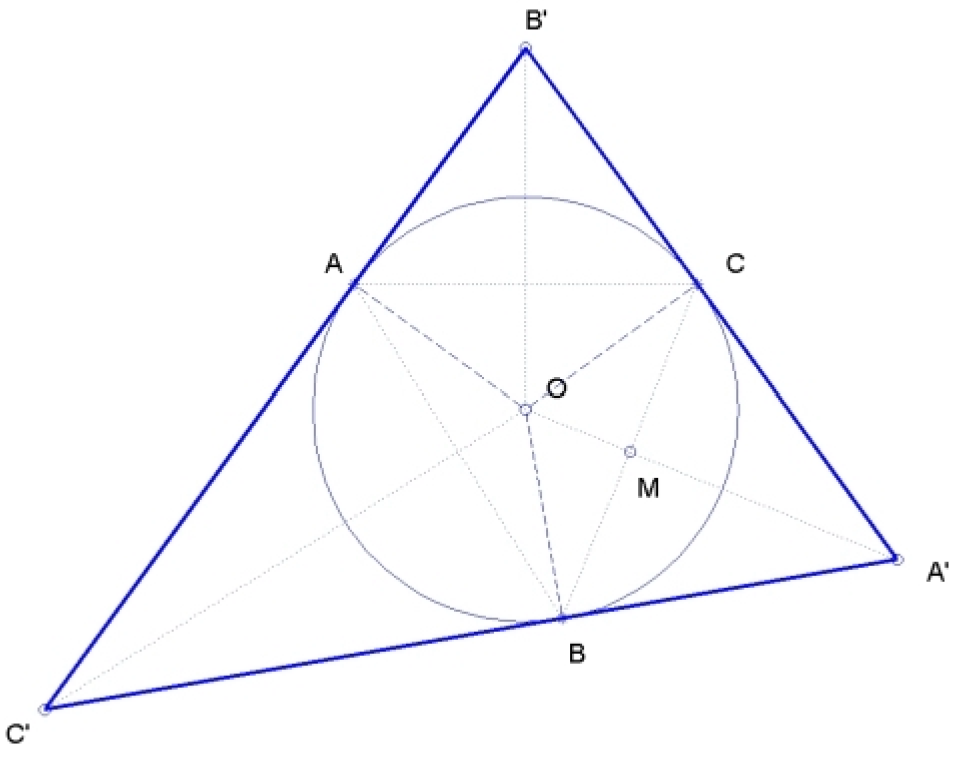
$$V''(h) = \frac{\pi}{3}(4 - 6h).$$

quindi

$$V''\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{3}\left(4 - \frac{9}{2}\right) < 0.$$

Pertanto $h = \frac{3}{4}$ rappresenta un massimo della funzione $V(h)$.

2)



Sia M il punto di minima distanza da BC ad O. Consideriamo i triangoli OBM e OBA'. Tali triangoli sono simili poiché rettangoli e con un angolo non retto in comune. Ne segue che $\overline{OM} : \overline{MB} = \overline{OB} : \overline{BA'}$ e quindi

$$\overline{BA'} = \frac{\overline{MB}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{BC}}{2h_A}$$

pertanto, poiché $\overline{CA'} = \overline{BA'}$, si ha

$$\overline{BA'} + \overline{CA'} = \frac{\overline{BC}}{h_A}$$

Analogamente si dimostra che

$$\overline{AB'} + \overline{B'C} = \frac{\overline{AC}}{h_B}$$

e

$$\overline{AC'} + \overline{C'B} = \frac{\overline{AB}}{h_C}$$

e quindi

$$P = \overline{BA'} + \overline{A'C} + \overline{AB'} + \overline{B'C} + \overline{AC'} + \overline{C'B} = \frac{\overline{BC}}{h_A} + \frac{\overline{CA}}{h_B} + \frac{\overline{AB}}{h_C}$$

cioè la tesi.

3) Sia

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

si osserva che

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

infatti

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

mentre

$$u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{2}{1-\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

da cui

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(1+\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{2+2\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{-2+2\sqrt{5}}{-4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$= u_{n+1}$$

(Il primo passaggio si ottiene razionalizzando il denominatore). Si ha inoltre

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}[1-1] = 0,$$

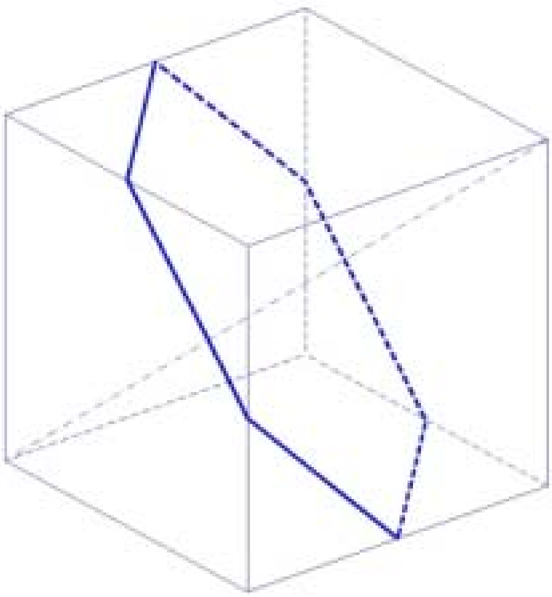
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] = 1,$$

pertanto poiché $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ (interi) e

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

allora u_n è intero $\forall$ *n* (per induzione su *n*).

4)



(a) Un piano passante per il centro perpendicolare alla retta passante per due vertici opposti, taglia le facce del cubo in modo tale da congiungere i punti medi degli spigoli (vedi figura). Pertanto il perimetro dell'esagono è

$$P = 6\sqrt{2}.$$

(b) Nel caso in cui il piano Π non passi per l'origine, si può dimostrare che il perimetro non cambia, poiché tre lati dell'esagono si accorciano e corrispondentemente tre si allungano in egual misura.

Per vedere questo analiticamente si può considerare il piano Π di equazioni $x+y+z=\alpha$ per $\alpha\in(-1,1)$. Tale piano interseca il cubo formando un esagono. Le lunghezze dei lati dell'esagono sono $\sqrt{2}(1+a)$ e $(1-a)\sqrt{2}$ (lo si vede, ad esempio, tagliando il piano Π col piano $x = -1$), pertanto il perimetro rimane uguale $\forall\alpha\in(-1,1)$.

5) Fra tutte le cifre da 1 a 9 occorre escluderne due. Possiamo escludere (1,2) o (1,3) o (1,4), ... fino a (1,9) (otto coppie), oppure (2,3) o (2,4), ... fino a (2,9) (sette coppie), oppure (3,4), ... fino a (3,9) (sei coppie) e così via. Il numero di tutte le possibili coppie che possiamo escludere è

$$\sum_{k=1}^{8} k = \frac{8\cdot 9}{2} = 36.$$

Pertanto Mario dovrà provare al più 36 numeri.

Soluzione alternativa: tutti i possibili numeri di telefono che si possono formare con sette cifre rappresentano le combinazioni di 9 oggetti (le cifre da 1 a 9) presi a gruppi di sette. Ne segue che, applicando le proprietà del calcolo combinatorio, le prove possibili sono date dal coefficiente binomiale

$$\binom{9}{7} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 36.$$

6) La probabilità che ha Giorgio di indovinare dove si trova l'asso di cuori è $\frac{2}{3}$.

Infatti, con la strategia del cambio, Giorgio sbaglia se e solo se all'inizio aveva scelto la carta giusta, cosa che avviene con probabilità $\frac{1}{3}$ e quindi indovina con probabilità $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

7) Supponiamo di numerare le palline da 1 a 4. Metto le palline 1, 2 sul piatto di sinistra, la

pallina 3 e una pallina di peso standard, che avrà il numero 5, su quello di destra.

Ci sono tre casi:

(i) L'ago della bilancia pende a sinistra. Ciò può voler dire che la 1 o la 2 è più pesante oppure la 3 è più leggera. Pesando la 1 nel piatto sinistro e la 2 nel piatto destro si scioglie il dubbio.

(ii) L'ago della bilancia pende a destra. Ciò può voler dire che la 1 o la 2 è più leggera oppure la 3 è più pesante. Anche in questo caso il dubbio si chiarisce pesando la 1 nel piatto di sinistra e la 2 nel piatto di destra.

(iii) L'ago della bilancia rimane al centro. Allora ci sono 3 possibilità: la 4 può essere più pesante o più leggera o di peso standard. Pertanto, pesando la 4 sul piatto di sinistra e la 5 sul piatto di destra si risolve il problema.