

Scuola Superiore di Catania
Ammissione al primo anno, 2003

Prima prova scritta: Matematica e Logica

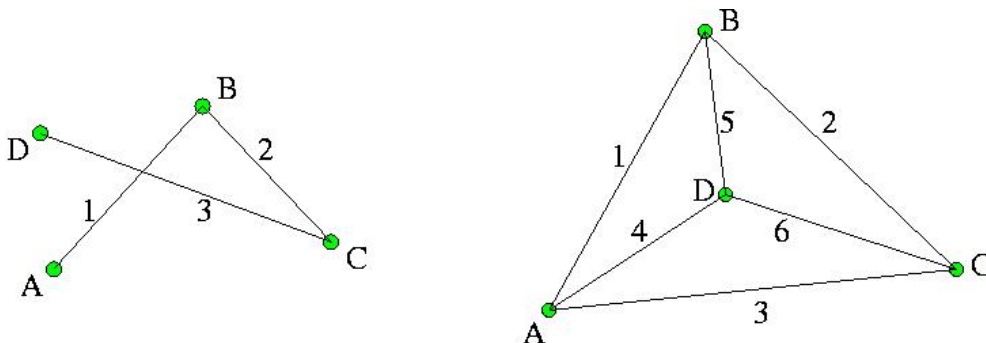
Corsi di laurea in Agraria, Farmacia, Medicina, Chimica, Scienze Biologiche

Il candidato risolva quanti più può dei seguenti esercizi

- 1) Un contenitore a forma di cilindro ha una base circolare di raggio 2. All'interno vi è acqua fino ad un'altezza h . All'interno del contenitore viene poggiato un cono d'acciaio con base circolare di raggio 1 e altezza L . Calcolare sotto quali condizioni su L ed h il cono risulta completamente immerso dal liquido.

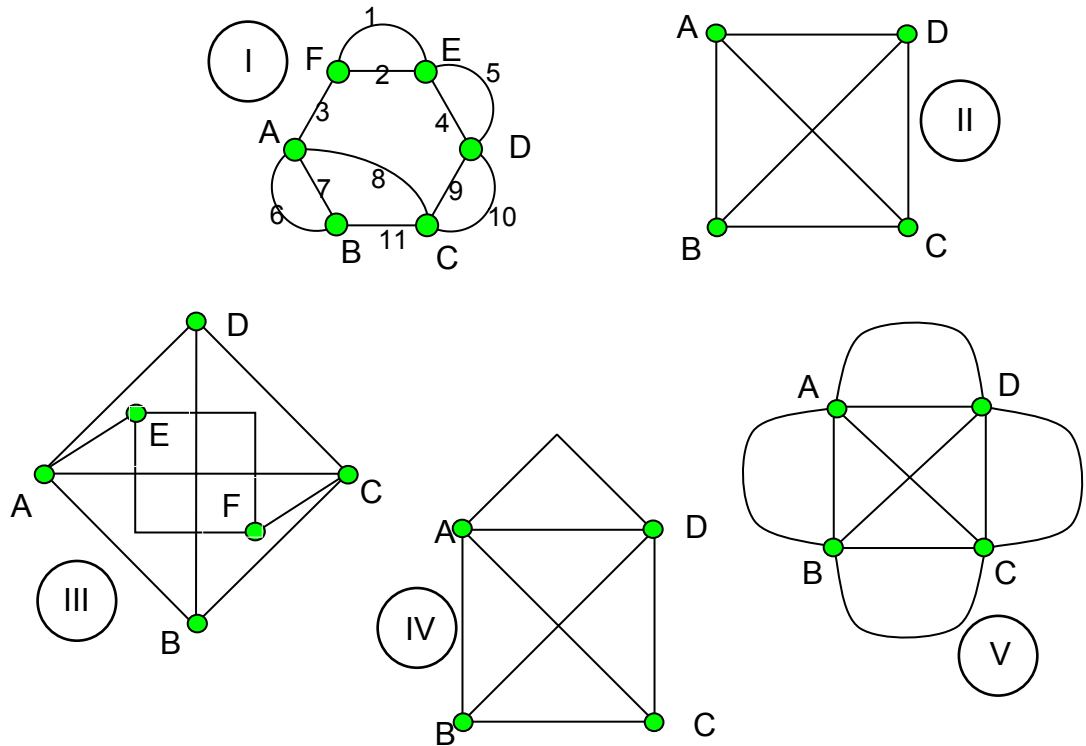
- 2) Due treni si muovono in linea retta, sullo stesso binario, l'uno contro l'altro, dopo essere partiti nello stesso istante da una distanza di 1000 m. Il primo viaggia ad una velocità di 10 m/s, ed il secondo ad una velocità di 15 m/s. Una mosca parte insieme ad essi, e si muove in linea retta lungo la congiungente i due treni, ad una velocità di 50 m/s. La mosca parte dallo stesso punto di partenza e, nell'istante in cui raggiunge il secondo treno, inverte la rotta e si dirige verso il primo. Non appena raggiunge il primo treno, la mosca inverte di nuovo la rotta, dirigendosi nuovamente verso il secondo treno, e così via, procedendo a velocità costante, ed invertendo la rotta ad ogni incontro con un treno. Si chiede di determinare quanta strada ha complessivamente percorso la mosca nell'istante in cui i due treni si scontrano.

- 3) Un grafo è una figura costituita da un insieme di punti (nodi) uniti tramite linee (archi). Ad esempio i grafi riportati nelle figure sono costituiti rispettivamente, da quattro nodi e tre archi, e da quattro nodi e sei archi. I nodi sono etichettati mediante lettere, e gli archi mediante numeri.
Si voglia ora percorrere tutti gli archi di un grafo, partendo da un nodo e giungendo ad un altro nodo, senza mai staccare la penna dal foglio, e senza mai passare più di una volta sopra un arco. Diciamo "percorrere bene" questo modo di disegnare il grafo.

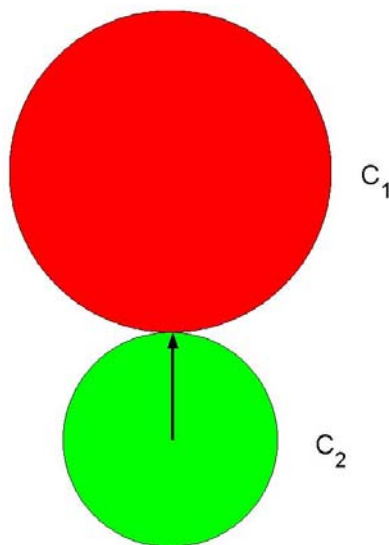


Nel primo caso è possibile farlo mediante il percorso

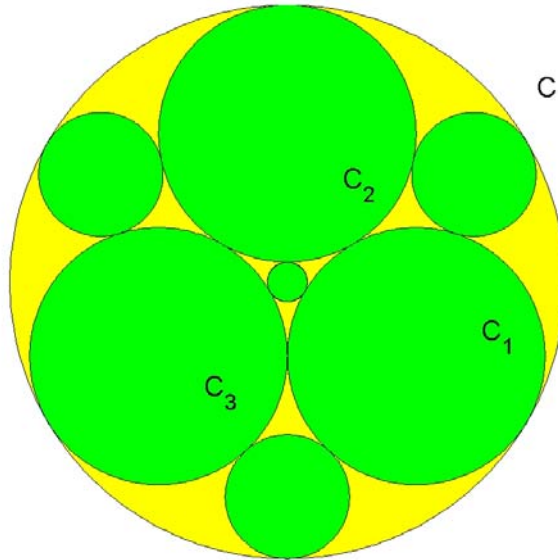
A 1 B 2 C 3 D, mentre nel secondo caso non è possibile percorrere bene il grafo. Dopo aver numerato gli archi (ad esempio come nel primo grafo mostrato sotto), stabilire quali grafi, fra i cinque raffigurati sotto, è possibile percorrere bene e giustificare la risposta.



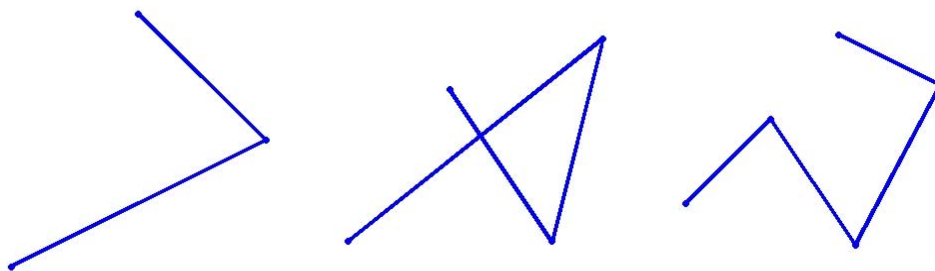
- 4) Si considerino due cerchi C_1 e C_2 di raggio rispettivamente $r_1 = 3$ ed $r_2 = 2$ disposti come in figura. Sul cerchio C_2 è disegnata una freccia rivolta verso l'alto. Il cerchio C_1 è fisso, mentre il cerchio C_2 rotola senza strisciare sul cerchio C_1 , in senso orario. Si chiede
- quanti giri deve percorrere il cerchio C_2 attorno al cerchio C_1 (ossia quanti giri percorre il centro del cerchio C_2) affinché la configurazione finale sia identica a quella iniziale (cioè con i due cerchi e la freccia disposti come in figura) ?
 - quanti giri avrà effettuato la freccia ? (un giro della freccia corrisponde a quello della lancetta dei minuti in un'ora).



- 5) All'interno di un cerchio C di raggio 1, sono disposti tre cerchi C_1, C_2, C_3 , tangenti a due a due e tangenti al cerchio esterno. Un altro cerchio è posto al centro del cerchio C , ed altri tre cerchi sono disposti all'interno del cerchio C e sono tangenti ciascuno a due dei tre cerchi C_1, C_2, C_3 , come mostrato nella figura sotto. Calcolare la somma delle aree dei cerchi.



- 6) Si consideri un'asta di lunghezza 2, e di estremi C e B , e punto medio A . Il punto A è vincolato a scorrere lungo l'asse verticale, mentre il punto B scorre lungo l'asse orizzontale. Scrivere le equazioni del luogo geometrico del punto C e del punto medio M del segmento di estremi A e B . Riconoscere tali luoghi.
- 7) Una spezzata poligonale è una linea formata da segmenti rettilinei collegati fra loro. Esempi di poligonalità con 2, 3 e 4 segmenti sono illustrati nella figura in basso.



Si consideri ora l'insieme di 9 punti del piano di coordinate (i, j) , $i = -1, 0, 1, j = -1, 0, 1$.



Determinare se è possibile tracciare una spezzata poligonale formata da quattro segmenti che passi per tutti i nove punti.

8) Si consideri la frazione

$$R = \frac{x^2 + xy + y^2}{2x^2 - 4y + xy + 5y^2 + 1}$$

dove x ed y sono numeri reali. Dimostrare che, qualunque siano x ed y , la frazione R è sempre compresa fra 0 e 1.