

Scuola Superiore di Catania  
Ammissione al primo anno, 2003

Prima prova scritta: Matematica e Logica  
Corsi di laurea in Ingegneria, Matematica, Fisica, Informatica

Il candidato risolva quanti più può dei seguenti esercizi

- 1) Si consideri il quadrilatero di vertici  $A \equiv (1,0)$ ,  $B \equiv (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ,  $C \equiv (-1/2, \sqrt{3}/2)$ ,  $D \equiv (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ .
- a) Dopo aver dimostrato che tale quadrilatero è inscritto ad una circonferenza, calcolarne l'area.
- b) Dimostrare inoltre che i quadrilateri iscritti ad una circonferenza unitaria che hanno area massima sono quadrati, e calcolarne l'area.

- 2) Sia data la successione di funzioni, definite nell'intervallo  $[-1,1]$ ,  $T_n(x) = \cos(n\varphi)$ , dove la relazione tra l'angolo  $\varphi$  e la coordinata  $x$  è data da:  $\cos\varphi = x$ . Dopo aver calcolato  $T_0(x)$  e  $T_1(x)$ , dimostrare che vale la relazione

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

e sfruttare tale risultato per dimostrare che  $T_n(x)$  è un polinomio in  $x$ .

[Si consiglia di sfruttare opportune identità trigonometriche]

- 3) Il coefficiente binomiale è definito dalla relazione

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1}$$

dove  $n$  e  $k$  sono due numeri interi, e  $n! \equiv n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  denota il fattoriale di  $n$ .

Dimostrare che per ogni intero  $n \geq 0$  e per ogni reale positivo  $a$  vale la relazione

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (a-x)^k = a^n$$

- 4) Una tassellatura dello spazio è così costituita. Si consideri un reticolo cubico, con cubi di lato 2. Ai vertici di ciascun cubo è centrata una sfera di raggio 1 (le sfere dunque si toccano senza sovrapporsi). Al centro di ogni cubo è posizionata una sferetta di raggio massimo, tale da non sovrapporsi alle sfere centrate ai vertici.

Tale reticolo viene chiamato cubico a corpo centrato, poiché al centro di ogni cubo del reticolo è posta una sfera. In tale configurazione ciascuna sfera di raggio 1 è tangente ad altre sei sfere di uguale raggio, e a otto sfere della seconda famiglia.

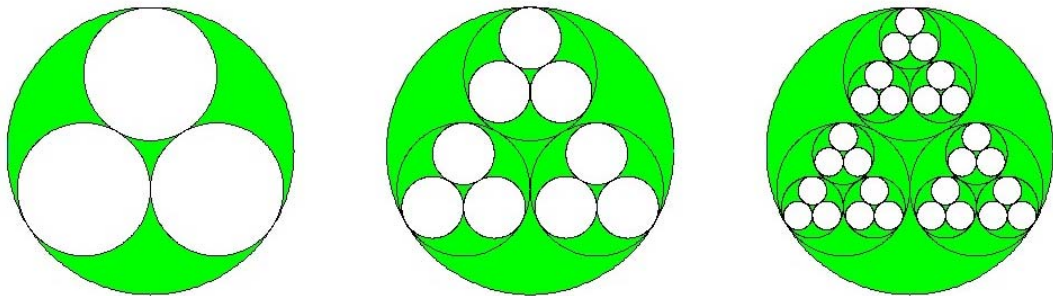
Calcolare la frazione di volume dello spazio occupata dalle sfere (grandi e piccole).

- 5) Un giocatore ha una moneta e scommette contro un banco infinito. Il giocatore lancia un dado. Se esce 1 o 2 il giocatore perde una moneta, altrimenti il giocatore vince una moneta. Se il giocatore perde subito la sua moneta, il gioco finisce, altrimenti il gioco va avanti fin

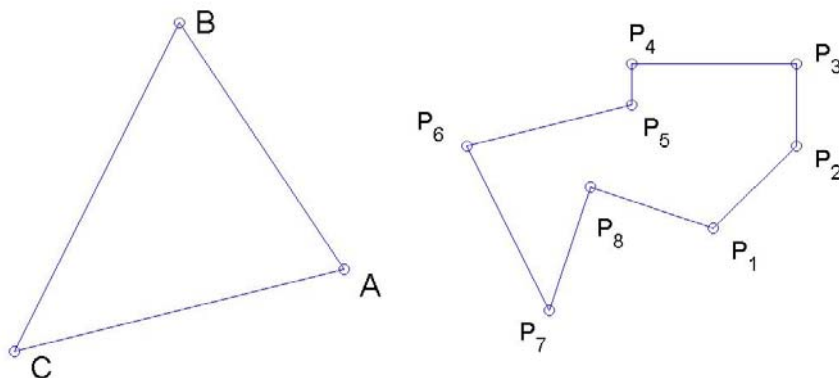
quando il giocatore non ha perso tutto, oppure fino a quando non si è raggiunto un numero prefissato  $L$  di lanci. Quale è la probabilità che il giocatore perda tutto con un massimo di 5 lanci?

- 6) Si consideri un cerchio  $C$  di raggio 1. All'interno di tale cerchio si disegnino tre cerchi tangenti a due a due e tangenti al cerchio  $C$ . Si colori di verde la regione interna al cerchio  $C$  ed esterna ai tre cerchi (vedi figura a sinistra). Si ripeta il procedimento per ciascuno dei tre cerchi. Si ottiene una figura piana composta da nove cerchietti bianchi ed una regione verde. Il procedimento di disegno e colorazione viene ripetuto fino a raggiungere un totale di  $L$  livelli. Nella figura in basso sono rappresentati i risultati dell'applicazione del procedimento dopo uno, due e tre livelli (cioè per  $L = 1$ ,  $L = 2$ , ed  $L = 3$  rispettivamente)

Si chiede di determinare l'area della regione verde per  $L = 5$ .



- 7) Si consideri il triangolo  $ABC$ , con  $A \equiv (x_1, y_1)$ ,  $B \equiv (x_2, y_2)$ ,  $C \equiv (0,0)$ , come illustrato in figura (a sinistra).



- a) Dimostrare che l'area del triangolo è data da

$$A = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

- b) Sia ora  $C \equiv (x_3, y_3)$ . Dimostrare che in questo caso l'area del triangolo si può scrivere come

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

dove si è posto  $x_4 = x_1, y_4 = y_1$ .

- c) Dimostrare che, dato il poligono di  $N$  vertici  $P_1, P_2, \dots, P_N$ , ordinati in modo da percorrere il poligono in senso antiorario, ed indicando  $P_{N+1} \equiv P_1$  (vedi figura), l'area del poligono si può scrivere

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

- 8) Un insieme  $S$  è costituito da sequenze ordinate e finite di caratteri (stringhe), contenenti le prime tre lettere dell'alfabeto (A, B, C). Esempi di elementi di  $S$  sono AABBBBA, ABC, BCBCBCB, CCCABB.

Una stringa può essere trasformata in un'altra seguendo una delle seguenti regole di trasformazione:

- I)  $xB \rightarrow xBC$
- II)  $Ax \rightarrow Axxx$
- III)  $xBB y \rightarrow xCy$
- IV)  $xCCy \rightarrow xy$

dove  $x$  ed  $y$  rappresentano due generiche stringhe di  $S$ . Mediante le regole di trasformazione è possibile costruire delle sequenze di stringhe, come ad esempio

$$AB \xrightarrow{(II)} ABBB \xrightarrow{(III)} ACB \xrightarrow{(I)} ACBC$$

Nella sequenza su rappresentata, i numeri romani indicano le regole che sono state utilizzate per ciascuna trasformazione. Diremo che una stringa  $y$  deriva da un'altra  $x$ , se esiste una sequenza di trasformazioni che permette di passare da  $x$  a  $y$ . Come illustrato nell'esempio precedente, possiamo così dire che la stringa  $ACBC$  deriva dalla stringa  $AB$ .

Determinare quali di queste affermazioni è vera

- a)  $ABC$  deriva da  $ACB$
- b)  $ACB$  deriva da  $ACBC$
- c)  $AC$  deriva da  $AB$

Giustificare le risposte