

**SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA**  
**Concorso di ammissione al primo livello dei corsi ordinari**  
**a.a.2005-2006**

**PROVA DI MATEMATICA E LOGICA**

*Corsi di laurea 1. – Matematica, Matematica per le applicazioni, Fisica, Informatica, Informatica applicata, tutti i corsi di laurea della Facoltà di Ingegneria.*

1. Una successione di numeri è costruita nel modo seguente

$$x_0 = 5, \quad x_1 = 16, \quad x_2 = 11, \quad x_3 = -5,$$

e, in generale,  $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ .

A che cosa è uguale  $x_{2005}$ ?

2. Il prodotto delle età di due amici è oggi uguale a 270. Se 3 anni fa il prodotto delle due età era 180, quale sarà il prodotto delle due età fra 3 anni?

3. Tre compagni di classe, Antonio, Bruna e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Bruna prima dice ad Antonio «Se tu non vai al cinema, non ci vado nemmeno io.», e poi si rivolge a Corrado, con cui ha litigato, dicendo «Io faccio il contrario di quello che fai tu.».

Corrado replica «Se Antonio va al cinema, ci vado anch'io.».

E' possibile che tutti si comportino coerentemente con le loro affermazioni?

In tal caso, chi va sicuramente al cinema? Chi sicuramente non va al cinema?

Per chi non siamo in grado di stabilire se va o no al cinema?

4. Un esagono  $ABCDEF$  (non necessariamente regolare) è inscritto in una circonferenza. Dimostrare che la somma degli angoli in  $A, C, E$  è uguale alla somma degli angoli in  $B, D, F$ .

5. Ci sono due urne, esternamente uguali: la prima contiene 3 palline di cui una sola rossa, mentre la seconda contiene 5 palline di cui una sola rossa. In un gioco, estraggo a sorte una pallina e vinco se la pallina estratta è rossa.

Mi vengono proposti due metodi per l'estrazione:

A) scelgo a caso una delle due urne e da questa estraggo una pallina;

B) metto insieme le palline di entrambe le urne e, dopo aver rimescolato tutte le palline, estraggo una pallina dall'unica urna che così si è formata.

E' più conveniente per me il metodo A oppure il metodo B?

Si consideri poi un caso più generale, in cui ci sono due urne, esternamente uguali, la prima con  $n$  palline di cui una sola rossa, la seconda con  $m$  palline di cui una sola rossa. Come prima, estraggo a sorte una pallina e vinco se la pallina estratta è rossa. Per quali valori di  $n$  e di  $m$  è più conveniente il metodo A e per quali è più conveniente il metodo B? In quali casi i due metodi danno la stessa probabilità di vincere?

6. Sono date le due equazioni

$$x - y + z + 1 = 0 \quad \text{e} \quad 2y - x + 4 = 0$$

A) Aggiungere una nuova equazione nelle incognite  $x, y, z$ , in modo che il sistema formato dalle tre equazioni (le due date e quella aggiunta) non ammetta alcuna soluzione (cioè risulti impossibile).

B) Aggiungere una nuova equazione nelle incognite  $x, y, z$ , in modo che il sistema formato dalle tre equazioni (le due date e quella aggiunta) ammetta infinite soluzioni (cioè risulti indeterminato).

C) Aggiungere una nuova equazione nelle incognite  $x, y, z$ , in modo che il sistema formato dalle tre equazioni (le due date e quella aggiunta) ammetta una ed una sola soluzione.

7. Nelle 81 caselle di una scacchiera  $9 \times 9$  si dispongono alcune pedine in modo che due pedine non occupino mai caselle adiacenti né in orizzontale, né in verticale e nemmeno in diagonale.

Diciamo che una disposizione di pedine sulla scacchiera (che rispetti le regole precedenti) è *massimale* se non si possono aggiungere altre pedine, sempre rispettando le regole. E' facile convincersi che esistono disposizioni massimali formate da un diverso numero di pedine.

Illustrare con una figura una disposizione massimale di pedine che contenga il massimo numero possibile di pedine. Illustrare poi con un'altra figura una disposizione massimale di pedine che contenga il minimo numero possibile di pedine.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, si fissi un punto  $P$  e si considerino successivamente:

il punto  $P'$  simmetrico di  $P$  rispetto all'asse  $x$ ,

il punto  $P''$  simmetrico di  $P'$  rispetto alla bisettrice del I e III quadrante,

il punto  $P'''$  simmetrico di  $P''$  rispetto all'asse  $y$ .

(In altre parole, si consideri la composizione delle tre simmetrie rispetto all'asse  $x$ , alla bisettrice del I e III quadrante, all'asse  $y$ .)

Che legame c'è fra il punto  $P'''$  e il punto  $P$ , cioè, come si può determinare direttamente il punto  $P'''$  a partire da  $P$ ?

[Può convenire considerare, inizialmente, un particolare punto  $P$ , per esempio il punto di coordinate (3; 1).]

9. A) Una piramide e un prisma hanno, ciascuno, 12 spigoli (nella piramide e nel prisma si contano sia gli spigoli laterali sia gli spigoli delle basi). Il numero delle facce della piramide è maggiore, uguale, o minore del numero delle facce del prisma? Il numero dei vertici della piramide è maggiore, uguale, o minore del numero dei vertici del prisma?

B) Rispondere alle domande precedenti partendo da una piramide e un prisma che hanno, ciascuno, 18 spigoli.

C) Le risposte precedenti valgono in generale, comunque si considerino una piramide e un prisma con lo stesso numero di spigoli?

[Si ricorda che un prisma è un poliedro che ha per "basi" due poligoni uguali posti su piani paralleli, e come "facce laterali" tanti parallelogrammi quanti sono i lati di ciascuna delle due basi.]