Scuola Superiore di Catania
Concorso di ammissione ai corsi ordinari di primo livello
a.a.2004-2005
Prova di Matematica e logica per i corsi di laurea in Matematica, Matematica per le applicazioni, Fisica, Informatica, Informatica applicata, tutti i corsi di laurea della Facoltà di Ingegneria
Soluzioni

1. Una successione di numeri è costruita nel modo seguente
$x_0 = 5$, $x_1 = 16$, $x_2 = 11$, $x_3 = -5$,
e, in generale, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$.
A che cosa è uguale x_{2005}?

Calcolando i valori dei primi termini della successione, ci si accorge che
$x_6 = x_0$ ed $x_7 = x_1$.
Di conseguenza, anche i successivi valori della successione si ripetono: più precisamente, la successione è periodica, di periodo 6.
Per rispondere, basta quindi calcolare il resto della divisione $2005 : 6$; siccome tale resto è 1, si conclude $x_{2005} = x_1 = 16$.

2. Il prodotto delle età di due amici è oggi uguale a 270. Se 3 anni fa il prodotto delle due età era 180, quale sarà il prodotto delle due età fra 3 anni?

Dette x ed y le età attuali dei due amici, il testo si traduce nel sistema

$$\begin{cases} xy = 270 \\ (x-3)(y-3) = 180 \end{cases}$$

Il sistema si può risolvere per sostituzione, ma è più rapido osservare che
da $(x-3)(y-3) = xy - 3(x+y) + 9$ segue $270 - 3(x+y) + 9 = 180$
cioè $3(x+y) = 99$.
Si conclude così $(x+3)(y+3) = xy + 3(x+y) + 9 = 270 + 99 + 9 = 378$.

3. Tre compagni di classe, Antonio, Bruna e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Bruna prima dice ad Antonio «Se tu non vai al cinema, non ci vado nemmeno io. », e poi si rivolge a Corrado, con cui ha litigato, dicendo «Io faccio il contrario di quello che fai tu.».
Corrado replica «Se Antonio va al cinema, ci vado anch'io. ».
E' possibile che tutti si comportino coerentemente con le loro affermazioni? In tal caso, chi va sicuramente al cinema? Chi sicuramente non va al cinema? Per chi non siamo in grado di stabilire se va o no al cinema?

In termini logici, possiamo esprimere le tre affermazioni nel modo seguente:
«Se Antonio non va al cinema, allora non ci va nemmeno Bruna»,
«Bruna va al cinema se e solo se non ci va Corrado»,
«Se Antonio va al cinema, allora ci va anche Corrado».
Esaminiamo le varie possibilità.
Se Antonio va al cinema, allora Corrado deve andare con lui, e quindi Bruna non va al cinema.
Se Antonio non va al cinema, allora non ci va nemmeno Bruna, e quindi Corrado va al cinema.
Ci sono quindi due situazioni in cui tutti si comportano coerentemente con quanto affermato. In conclusione: Bruna non va al cinema, Corrado va al cinema, mentre non sappiamo se Antonio va o no al cinema.
Si noti, infine, che la frase «Se Antonio non va al cinema, non ci va nemmeno Bruna» equivale a «Se Bruna va al cinema, allora ci va anche Antonio», ma *non* a «Se Antonio va al cinema, allora ci va anche Bruna».

4. Un esagono $ABCDEF$ (non necessariamente regolare) è inscritto in una circonferenza. Dimostrare che la somma degli angoli in A, C, E è uguale alla somma degli angoli in B, D, F.

Ci sono vari metodi per rispondere.
Un primo procedimento consiste nel tracciare i sei raggi della circonferenza che hanno un estremo in un vertice dell'esagono. Si ottengono così 6 triangoli isosceli (i raggi sono tutti uguali). L'enunciato si dimostra sommando in modo opportuno gli angoli alla base dei 6 triangoli, e ricordando che tali angoli sono a due a due uguali per un noto teorema di geometria.
Un altro metodo consiste nel tracciare una diagonale che divida l'esagono in due quadrilateri: siccome questi quadrilateri sono inscrivibili, in ciascuno

dei due la somma degli angoli opposti è un angolo piatto. Se ne deduce facilmente la tesi.
Infine, si può osservare che ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro: gli angoli al centro che corrispondono agli angoli dell'esagono con vertici in A, C, E hanno somma uguale a due angoli giro, così come gli angoli al centro che corrispondono agli angoli dell'esagono con vertici in B, D, F.

5. Ci sono due urne, esternamente uguali: la prima contiene 3 palline di cui una sola rossa, mentre la seconda contiene 5 palline di cui una sola rossa. In un gioco, estraggo a sorte una pallina e vinco se la pallina estratta è rossa.
Mi vengono proposti due metodi per l'estrazione:
A) scelgo a caso una delle due urne e da questa estraggo una pallina;
B) metto insieme le palline di entrambe le urne e, dopo aver rimescolato tutte le palline, estraggo una pallina dall'unica urna che così si è formata.
E' più conveniente per me il metodo A oppure il metodo B?
Si consideri poi un caso più generale, in cui ci sono due urne, esternamente uguali, la prima con n palline di cui una sola rossa, la seconda con m palline di cui una sola rossa. Come prima, estraggo a sorte una pallina e vinco se la pallina estratta è rossa. Per quali valori di n e di m è più conveniente il metodo A e per quali è più conveniente il metodo B? In quali casi i due metodi danno la stessa probabilità di vincere?

Seguendo il metodo A ho 1/2 di probabilità di scegliere ciascuna delle due urne. Pertanto la probabilità di estrarre una pallina rossa è
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.
Seguire il metodo B, significa estrarre una pallina da un'urna che ne contiene 8, di cui 2 rosse. La probabilità di vincere è 1/4; e siccome 1/4 > 4/15, si conclude che è più conveniente il metodo A.
Nel caso generale, le due probabilità sono rispettivamente
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{n+m}{2nm}$ e $\frac{2}{n+m}$.
Siccome tutti i numeri sono positivi, possiamo eliminare i denominatori e confrontare $(n + m)^2$ e $4nm$, cioè $(n - m)^2$ e 0. Osservando che il quadrato non è mai negativo ed è 0 se e solo se $n = m$, si conclude che i due metodi danno la stessa probabilità di vincere se $n = m$; in tutti gli altri casi è più conveniente il metodo A.

6. Sono date le due equazioni

$$x - y + z + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad 2y - x + 4 = 0$$

A) Aggiungere una nuova equazione nelle incognite x, y, z, in modo che il sistema formato dalle tre equazioni (le due date e quella aggiunta) non ammetta alcuna soluzione (cioè risulti impossibile).

B) Aggiungere una nuova equazione nelle incognite x, y, z, in modo che il sistema formato dalle tre equazioni (le due date e quella aggiunta) ammetta infinite soluzioni (cioè risulti indeterminato).

C) Aggiungere una nuova equazione nelle incognite x, y, z, in modo che il sistema formato dalle tre equazioni (le due date e quella aggiunta) ammetta una ed una sola soluzione.

Nel primo caso occorre aggiungere un'equazione che sia in contraddizione con quelle date: per esempio, si possono sommare i primi membri delle due equazioni iniziali e porre la somma uguale ad 1 (invece che a 0), scrivendo
$y + z + 5 = 1$, cioè $y + z + 4 = 0$
Nel secondo caso occorre aggiungere un'equazione che non dia alcuna nuova informazione: per esempio, si possono sommare i primi membri delle due equazioni iniziali e porre la somma uguale a 0, scrivendo
$y + z + 5 = 0$.
Infine, nell'ultimo caso basta aggiungere un'equazione in modo che il determinante della matrice dei coefficienti sia diverso da 0, come
$x = 0$.

7. Nelle 81 caselle di una scacchiera 9×9 si dispongono alcune pedine in modo che due pedine non occupino mai caselle adiacenti né in orizzontale, né in verticale e nemmeno in diagonale.
Diciamo che una disposizione di pedine sulla scacchiera (che rispetti le regole precedenti) è *massimale* se non si possono aggiungere altre pedine, sempre rispettando le regole. E' facile convincersi che esistono disposizioni massimali formate da un diverso numero di pedine.
Illustrare con una figura una disposizione massimale di pedine che contenga il massimo numero possibile di pedine. Illustrare poi con un'altra figura una disposizione massimale di pedine che contenga il minimo numero possibile di pedine.

La prima domanda è più facile: ci sono 25 pedine, come si vede collocando le pedine in righe alternate, in una casella sì e in una no.

Quanto al minimo numero di pedine di una disposizione massimale, è forse spontaneo rispondere 16, ma questa risposta non è corretta. Infatti, in una scacchiera 3×3 una disposizione massimale si ottiene semplicemente collocando una pedina al centro, e quindi in una scacchiera 9×9 sono sufficienti solo 9 pedine.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, si fissi un punto P e si considerino successivamente:
il punto P' simmetrico di P rispetto all'asse x,
il punto P'' simmetrico di P' rispetto alla bisettrice del I e III quadrante,
il punto P''' simmetrico di P'' rispetto all'asse y.
(In altre parole, si consideri la composizione delle tre simmetrie rispetto all'asse x, alla bisettrice del I e III quadrante, all'asse y.)
Che legame c'è fra il punto P''' e il punto P, cioè, come si può determinare direttamente il punto P''' a partire da P?
[Può convenire considerare, inizialmente, un particolare punto P, per esempio il punto di coordinate (3; 1).]

Dette $(x; y)$ le coordinate del punto di partenza P, abbiamo
$P'\ (x; -y)$,
$P''\ (-y; x)$,
$P'''\ (y; x)$.
In definitiva, la composizione delle tre simmetrie considerate equivale alla simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

9. A) Una piramide e un prisma hanno, ciascuno, 12 spigoli (nella piramide e nel prisma si contano sia gli spigoli laterali sia gli spigoli delle basi). Il numero delle facce della piramide è maggiore, uguale, o minore del numero delle facce del prisma? Il numero dei vertici della piramide è maggiore, uguale, o minore del numero dei vertici del prisma?
B) Rispondere alle domande precedenti partendo da una piramide e un prisma che hanno, ciascuno, 18 spigoli.
C) Le risposte precedenti valgono in generale, comunque si considerino una piramide e un prisma con lo stesso numero di spigoli?
[Si ricorda che un prisma è un poliedro che ha per "basi" due poligoni uguali posti su piani paralleli, e come "facce laterali" tanti parallelogrammi quanti sono i lati di ciascuna delle due basi.]

Iniziamo con due osservazioni.
In una piramide, se il poligono di base ha n lati, allora ci sono:
$2n$ spigoli (n di base ed n che collegano i vertici della base con il vertice della piramide), $n + 1$ vertici, $n + 1$ facce (la base ed n facce laterali).
In un prisma, se i poligoni di base hanno n lati, allora ci sono:
$3n$ spigoli (n in ciascuna base ed n laterali), $2n$ vertici, $n + 2$ facce (due basi ed n facce laterali).
Nel caso A, dunque, abbiamo a che fare con una piramide esagonale e un prisma quadrangolare, cioè un parallelepipedo. La piramide ha 7 facce e 7 vertici, mentre il prisma ha 6 facce e 8 vertici. La piramide ha più facce e meno vertici del prisma.
Notiamo che, per la formula di Eulero $f + v = s + 2$, a parità del numero degli spigoli, se un poliedro ha più facce di un altro, ha necessariamente meno vertici.
Nel caso B, abbiamo una piramide che ha per base un poligono di 9 lati e un prisma esagonale. La piramide ha 10 facce e 10 vertici, mentre il prisma ha 8 facce e 12 vertici. La piramide ha ancora più facce e meno vertici del prisma.
Le risposte precedenti valgono in generale, Infatti se una piramide ed un prisma hanno uno stesso numero s di spigoli, questo numero s è necessariamente multiplo di 6 per le osservazioni iniziali, ed è maggiore o uguale a 12 (un prisma ha al minimo 9 spigoli). Abbiamo che:
nella piramide, il numero sia dei vertici sia delle facce è $s/2 + 1$;
nel prisma, il numero dei vertici e il numero delle facce sono rispettivamente uguali a $2s/3$ ed $s/3 + 2$.
E' facile verificare che per $s > 6$ sono verificate le disuguaglianze citate.