

SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI  
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA  
Area delle Scienze Sperimentali - Prova di Matematica e Logica  
(corsi di laurea *diversi* da Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

23 Settembre 2008

**Non sono ammessi libri, calcolatrici, cellulari, né altri apparecchi elettronici. Ogni risposta errata comporta un punteggio negativo: in caso di dubbio, è preferibile non rispondere.**

**ESERCIZIO 1.**

L'ispettore Poirot indaga sulla serata passata da Anna, Bruno e Carlo.  
Raccoglie le seguenti testimonianze da quattro loro conoscenti:

- (1) *sono sicuro che, se Anna è uscita, allora si è vista con Bruno e con Carlo;*
- (2) *sono sicuro che, se Anna è uscita, allora non si è vista con uno dei due;*
- (3) *sono sicuro che Anna è rimasta a casa, o si è vista con Bruno e Carlo;*
- (4) *sono sicuro che Anna è rimasta a casa e si è vista con almeno uno dei due.*

L'ispettore sa con certezza che solo uno dei testimoni mente. Come stanno le cose?

- Il primo testimone mente
- Il secondo testimone mente
- Il terzo testimone mente
- Il quarto testimone mente
- Anna non ha visto né Bruno né Carlo
- Anna ha visto solo Bruno
- Anna ha visto solo Carlo
- Anna ha visto entrambi
- Non è possibile decidere chi dei due Anna abbia visto

**ESERCIZIO 2**

Ci sono 8 monete su un tavolo. Pietro e Ahmed giocano secondo queste regole: ognuno di essi, a turno, può prendere da 1 a 3 monete dal tavolo (e almeno una); vince che prende le ultime che restano.

(i) Ammettendo che entrambi seguano la strategia migliore per vincere, si può dire che vincerà se inizia Pietro?

- vincerà Pietro
- vincerà Ahmed
- non si può dire chi vincerà, ma è avvantaggiato Pietro
- non si può dire chi vincerà

- (ii) E se le monete inizialmente sul tavolo sono 9? (supponendo che inizi Pietro)
- vincerà Pietro
  - vincerà Ahmed
  - non si può dire chi vincerà, ma è avvantaggiato Pietro
  - non si può dire chi vincerà
- (iii) E se le monete sul tavolo sono 50? (supponendo che inizi Pietro)
- vincerà Pietro
  - vincerà Ahmed
  - non si può dire chi vincerà, ma è avvantaggiato Pietro
  - non si può dire chi vincerà

### ESERCIZIO 3

Il professor Numeris ha scoperto tre importanti tipi di numeri: i numeri *bizzarri*, i numeri *fantasma*, e i numeri *impossibili*. Il professore ha elaborato delle congetture, quindi si è accorto che alcune di esse sono sicuramente equivalenti. Quali?

- Condizione sufficiente perché un numero sia impossibile, è che sia bizzarro o fantasma (oppure entrambe le cose insieme)
- Ogni numero impossibile è bizzarro o fantasma (oppure entrambe le cose insieme)
- Se un numero non è impossibile, allora non è bizzarro oppure non è fantasma (oppure né l'uno né l'altro)
- Condizione necessaria perché un numero sia bizzarro o fantasma è che esso sia impossibile
- Un numero che non sia né bizzarro né fantasma non è impossibile
- Perché un numero non sia impossibile, esso non deve essere né bizzarro né fantasma
- Nessun numero impossibile è allo stesso tempo bizzarro e fantasma
- Nessun numero che sia allo stesso tempo bizzarro e fantasma è impossibile

[Apporre lo stesso segno sugli enunciati che si ritengono equivalenti; usare per chiarezza solo i segni  $\times$ ,  $/$ ,  $\bullet$ ]

### ESERCIZIO 4

La commissione di Scienze Sperimentali è composta da 3 membri e prende le decisioni a maggioranza: i primi due membri della commissione hanno ognuno probabilità  $p$  di prendere la decisione corretta, mentre il terzo decide lanciando una moneta (equa).

(i) Calcolare la probabilità che la commissione prenda la decisione corretta: .....

Il membro della commissione di Scienze Sperimentali che prendeva decisioni a caso viene sostituito da un altro che ha probabilità  $p$  di prendere la decisione corretta.

(ii) Calcolare la probabilità che la nuova commissione di Scienze Sperimentali prenda la decisione corretta: .....

(iii) i valori di  $p$  per i quali la nuova commissione di Scienze Sperimentali ha uguale probabilità della vecchia di prendere la decisione corretta: .....

### ESERCIZIO 5

Ad ogni carattere della lingua italiana si può far corrispondere univocamente un numero compreso tra 1 ed  $n = 21$ ; un testo italiano di  $N$  caratteri è quindi equivalente (senza tener conto di spazi e segni di interpunzione) ad una lista di  $N$  numeri, ognuno compreso tra 1 ed  $n$ .

Per memorizzare un numero compreso tra 1 ed  $n$ , usando la scrittura binaria, bisogna avere a disposizione  $\lceil \log_2 n \rceil$  bits (dove  $\lceil x \rceil$  indica il più piccolo intero maggiore o uguale a  $x$ ). Ricordiamo che:

$$1 \text{ Byte} = 1B = 8 \text{ bits}$$
$$1KB = 10^3B, \quad 1MB = 10^3KB, \quad 1GB = 10^3MB$$

La Divina Commedia è composta da 15000 endecasillabi (versi di 11 sillabe). Considerando che una sillaba può contenere da 1 a 5 caratteri, stimare:

- i) il numero minimo di KB (teoricamente) necessari per memorizzare la Divina Commedia: .....
- ii) il numero massimo di KB (teoricamente) sufficienti per memorizzare la Divina Commedia: .....

Un metodo più efficiente di memorizzare un testo italiano è quello di considerare che vi sono circa 2700 sillabe possibili; si può dunque assimilare un testo di  $N$  sillabe ad una lista di  $N$  numeri compresi tra 1 e  $n = 2700$ :

- iii) Quanti KB servono a memorizzare la Divina Commedia con questo secondo metodo? .....
- iv) Quante copie della divina Commedia si possono memorizzare in 1GB col secondo metodo? .....

*Nota: approssimare le risposte con numeri interi.*

### ESERCIZIO 6

Il campo degli scienziati tedeschi si trova 7Km a Nord-Ovest del campo degli scienziati italiani. Il veicolo degli italiani è in panne 6,276 Km ad Est del campo tedesco. Calcolare:

- a. la *distanza*  $d$  in Km del campo italiano dal veicolo in panne, con una precisione di meno di dieci metri: .....
- b. la direzione più breve per raggiungere il veicolo dal campo italiano; l'*angolo*, cioè, che essa forma con la direzione Ovest-Est ( $\rightarrow$ ): .....
- c. Se nel calcolo della direzione in (b) si fosse commesso a causa delle approssimazioni un errore di 2 gradi, di quanti metri si sbaglierebbero gli scienziati italiani camminando per  $d$  in tale direzione, rispetto alla reale posizione del veicolo in panne?

- meno di 25m     più di 25m, ma meno di 50m     più di 50m, ma meno di 100m  
 più di 100m, ma meno di 150m     più di 150m, ma meno di 200m     più di 200m

*Suggerimento: si possono usare i seguenti valori, con un errore inferiore a  $10^{-4}$ :*

$$\sin(1^\circ) \sim 0,0174$$
$$\sqrt{3} \sim 1,732$$
$$7(3 - \sqrt{3})/\sqrt{2} \sim 6,276$$

SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI  
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA  
Area delle Scienze Sperimentali - Prova di Matematica e Logica  
(corsi di laurea in Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria))

23 Settembre 2008

**Non sono ammessi libri, calcolatrici, cellulari, né altri apparecchi elettronici. Ogni risposta errata comporta un punteggio negativo: in caso di dubbio, è preferibile non rispondere.**

**ESERCIZIO 1.**

L'ispettore Poirot indaga sulla serata passata da Anna, Bruno e Carlo.  
Raccoglie le seguenti testimonianze da quattro loro conoscenti:

- (1) *sono sicuro che, se Anna è uscita, allora si è vista con Bruno e con Carlo;*
- (2) *sono sicuro che, se Anna è uscita, allora non si è vista con uno dei due;*
- (3) *sono sicuro che Anna è rimasta a casa e si è vista con Bruno o Carlo;*
- (4) *sono sicuro che Anna è rimasta a casa e si è vista con Bruno.*

L'ispettore sa con certezza che solo uno dei testimoni mente. Come stanno le cose?

- Il primo testimone mente
- Il secondo testimone mente
- Il terzo testimone mente
- Il quarto testimone mente
- Anna non ha visto né Bruno né Carlo
- Anna ha visto solo Bruno
- Anna ha visto solo Carlo
- Anna ha visto entrambi
- Non è possibile decidere chi dei due Anna abbia visto

**ESERCIZIO 2**

Ci sono 8 monete su un tavolo. Pietro e Ahmed giocano secondo queste regole: ognuno di essi, a turno, può prendere da 1 a 3 monete dal tavolo (e almeno una); vince che prende le ultime che restano.

(i) Ammettendo che entrambi seguano la strategia migliore per vincere, si può dire che vincerà se inizia Pietro?

- vincerà Pietro
- vincerà Ahmed
- non si può dire chi vincerà, ma è avvantaggiato Pietro
- non si può dire chi vincerà

(ii) E se le monete inizialmente sul tavolo sono 9? (supponendo che inizi Pietro)

- vincerà Pietro
- vincerà Ahmed
- non si può dire chi vincerà, ma è avvantaggiato Pietro
- non si può dire chi vincerà

(iii) E se le monete sul tavolo sono 50? (supponendo che inizi Pietro)

- vincerà Pietro
- vincerà Ahmed
- non si può dire chi vincerà, ma è avvantaggiato Pietro
- non si può dire chi vincerà

### ESERCIZIO 3

Il professor Numeris ha scoperto tre importanti tipi di numeri: i numeri *bizzarri*, i numeri *fantasma*, e i numeri *impossibili*. Il professore ha elaborato delle congetture, quindi si è accorto che alcune di esse sono sicuramente equivalenti. Quali?

- Condizione sufficiente perché un numero sia impossibile, è che sia bizzarro o fantasma (oppure entrambe le cose insieme)
- Ogni numero impossibile è bizzarro o fantasma (oppure entrambe le cose insieme)
- Se un numero non è impossibile, allora non è bizzarro oppure non è fantasma (oppure né l'uno né l'altro)
- Condizione necessaria perché un numero sia bizzarro o fantasma è che esso sia impossibile
- Un numero che non sia né bizzarro né fantasma non è impossibile
- Perché un numero non sia impossibile, esso non deve essere né bizzarro né fantasma
- Nessun numero impossibile è allo stesso tempo bizzarro e fantasma
- Nessun numero che sia allo stesso tempo bizzarro e fantasma è impossibile

[Apporre lo stesso segno sugli enunciati che si ritengono equivalenti; usare per chiarezza solo i segni  $X$ ,  $/$ ,  $\cdot$ ]

### ESERCIZIO 4

La commissione di Scienze Esatte è composta da un solo membro che ha probabilità  $p$  di prendere la decisione corretta. La commissione di Scienze Sperimentali è invece composta da 3 membri e prende le decisioni a maggioranza: due dei tre membri sono qualificati e ognuno di essi ha probabilità  $p$  di prendere la decisione corretta, mentre il terzo decide lanciando una moneta (equa).

Ammettendo che i membri qualificati abbiano una probabilità superiore di prendere la decisione corretta rispetto a quello che decide a caso, si dica:

(i) quale delle due commissioni ha maggiore probabilità di prendere la decisione corretta?

- la Commissione di Scienze Esatte
- la Commissione di Scienze Sperimentali
- hanno uguale probabilità
- dipende dal valore  $p$

(ii) è più probabile che entrambe le commissioni prendano la decisione corretta, o che una prenda la decisione corretta e l'altra no?

- i due eventi hanno uguale probabilità
- è sempre più probabile che entrambe prendano la decisione corretta
- se  $p > \frac{1}{3}$  è più probabile che entrambe prendano la decisione corretta
- se  $p > \frac{1}{2}$  è più probabile che entrambe prendano la decisione corretta
- se  $p > \frac{2}{3}$  è più probabile che entrambe prendano la decisione corretta
- è sempre più probabile che solo una delle due prenda la decisione corretta

Il membro della commissione di Scienze Sperimentali che prendeva decisioni a caso viene sostituito da un altro che ha anch'egli probabilità  $p$  di prendere la decisione corretta. Calcolare, per questa nuova commissione:

(iii) la probabilità che essa prenda la decisione corretta: .....

(iv) i valori di  $p$  per i quali la nuova commissione di Scienze Sperimentali ha uguale probabilità della vecchia di prendere la decisione corretta: .....

### ESERCIZIO 5

(i) Calcolare la prima cifra decimale di  $\log_{10} 2$ : .....

(ii) calcolare  $\log_{10} 7$  con un errore inferiore a 2 centesimi: .....

*Suggerimento per (i) e (ii):* approssimare  $\log_{10} 7$  con frazioni.

(iii) Calcolare l'ordine di grandezza di  $7^{30}$ : .....

*Nota:* l'ordine di grandezza di un numero  $N$  è la più grande potenza di 10 inferiore o uguale ad  $N$ . Per es.  $O(99) = 1$  e  $O(100) = O(101) = 3$ .

(iv) Quali delle seguenti disuguaglianze sono vere?

- $2^{87} > 7^{30}$
- $2^{88} > 7^{30}$
- $2^{89} > 7^{30}$
- $2^{90} > 7^{30}$
- nessuna delle precedenti

**ESERCIZIO 6**

L'icosaedro  $\mathcal{I}$  è un poliedro regolare con 20 facce triangolari tutte uguali (fig. A): in ogni vertice concorrono precisamente 5 facce.

Tagliamo via dall'icosaedro tutti i suoi vertici  $v_i$ , segandolo con dei piani che intersecano gli spigoli contenenti  $v_i$  ad  $\frac{1}{3}$  della loro lunghezza (fig. B); si ottiene così un nuovo poliedro, simile a un pallone da calcio, che ha per facce pentagoni ed esagoni regolari: l'icosaedro troncato  $\mathcal{I}_t$  (fig. C).

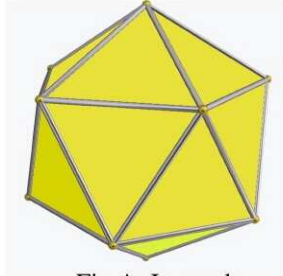


Fig.A: Icosaedro

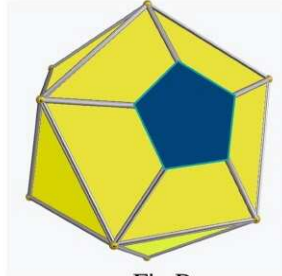


Fig.B

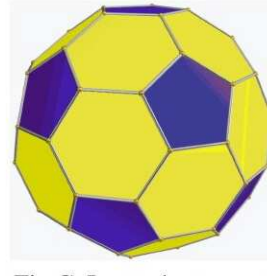


Fig.C: Icosaedro troncato

Sapendo che ogni spigolo dell'icosaedro troncato ha lunghezza 1, calcolare:

- (i) il numero  $h$  delle facce esagonali di  $\mathcal{I}_t$ : .....
- (ii) il numero  $p$  delle facce pentagonali di  $\mathcal{I}_t$ : .....
- (iii) l'area  $A_h$  di ogni faccia esagonale di  $\mathcal{I}_t$ : .....
- (iv) l'area  $A_p$  di ogni faccia pentagonale di  $\mathcal{I}_t$ : .....

Immaginiamo ora di scrivere i numeri  $1, \dots, p$  sulle  $p$  facce pentagonali, e le lettere possibili  $a, b, c, \dots$  ecc. sulle facce esagonali, e di lanciare l'icosaedro troncato  $\mathcal{I}_t$ , così etichettato, come un dado. Assumendo che la probabilità di ottenere una faccia prefissata sia proporzionale alla sua area, calcolare:

- (v) la probabilità che, in un lancio, esca una lettera: .....
- (vi) la probabilità che, in un lancio, esca un numero: .....
- (vii) Facendo 3 lanci, quale dei seguenti risultati è il più probabile?
  - tre lettere
  - due lettere ed un numero (in qualsiasi ordine)
  - una lettera e due numeri (in qualsiasi ordine)
  - tre numeri

Nota:  $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ .